NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. EUGÈNE ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS,
MEMBRE DU CONSEIL SUPÉRIEUR DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

DATES PRINCIPALES

DE LA CARRIÈRE DE L'AUTEUR.

Elève à l'École Polytechnique	1852-1854
Professeur au lycée Charlemagne	1855-1867
Docteur ès Sciences de la Faculté de Paris avec mention honorable.	1858
Examinateur d'admission à l'École Centrale	1858-1877
Répétiteur de Géométrie et de Stéréotomie à l'École Polytechnique	1861-1883
Membre correspondant de l'Académie de Montpellier	1862
Membre de la Société philomathique	1863
Officier d'Académie	1867
Professeur de Géométrie descriptive et de Stéréotomie à l'Ecole Centrale	1867-1884
Chevalier de la Légion d'honneur	1887
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique	1877-1883
Président de la Société mathématique de France	1883
Examinateur de sortie à l'École Polytechnique pour l'Astronomie et la Stéréotomie	1883
Professeur de Géométrie descriptive au Conservatoire des Arts et Métiers	1884
Membre du Conseil supérieur de l'Enseignement technique	1888
Officier de l'Instruction publique	1889

Membre de la Commission supérieure des Congrès et Conférences, ainsi que des Comités d'admission et d'installation pour l'Enseignement supérieur et l'Enseignement technique à l'Exposition universelle de 1889.

TRAVAUX.

§ I. — ANALYSE MATHÉMATIQUE.

I.

Sur la décomposition des fractions rationnelles.

Comptes rendus, t. XLVI.

La formule relative au cas où les racines sont inégales renferme implicitement toute la théorie, et l'on doit pouvoir en déduire le développement relatif au cas des racines multiples, en substituant d'abord au dénominateur un nouveau polynôme dont tous les facteurs soient inégaux et dont les coefficients diffèrent infiniment peu de ceux du premier.

Toutefois, la complication apparente de ce calcul a fait regarder cette méthode comme « impropre à fournir la loi générale du nouveau développement ». (SERRET, *Algèbre supérieure*, 1[re] édition.)

Le but de ce travail est de combler cette lacune de la théorie et de montrer comment on peut parvenir aisément par cette voie à la loi générale demandée. Le succès et l'élégance du procédé tiennent à la considération de l'équation qui a pour racines $p_1, p_2, \ldots, p_k$, en désignant par $a + p_1 h$, $a + p_2 h, \ldots, a + p_k h$ les k racines qui tendent vers a lorsqu'on fait tendre h vers zéro.

II.

Sur la théorie des résidus.

Comptes rendus, t. LXVI.

Ce travail fait, en quelque sorte, suite au précédent. Il est relatif à une méthode générale pour ramener la démonstration des divers théorèmes du calcul des résidus au cas où il n'y a que des racines simples.

III.

Sur les fonctions X_n.

Comptes rendus, tome LXVII.

Cette Note contient une expression nouvelle des fonctions X_n :

Si l'on désigne par a_r la quantité

$$\frac{1+(-1)^r}{2(r+1)},$$

la fonction X_n est proportionnelle au déterminant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

On y donne, en outre, une nouvelle méthode pour démontrer les propriétés de ces fonctions.

IV.

Sur la division abrégée.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, t. XVI.

La démonstration connue est longue, indirecte, et offre un cas d'exception. On donne ici une démonstration simple, directe et applicable à tous les cas.

V.

Sur la théorie des racines égales.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, t. XVI.

Démonstration des théorèmes de M. Ostrogradski et comparaison des procédés de réduction qui en résultent avec la méthode de Lagrange.

VI.

Sur les racines entières des équations à coefficients entiers.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1[re] série, t. XVI.

Démonstration d'un théorème de Gauss (règle d'exclusion).

VII.

Sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les dénominateurs des réduites d'une fraction continue.

Journal de l'École Polytechnique, XXVII[e] Cahier.

La question traitée est la suivante : *Connaissant les valeurs d'une fonction entière et de degré* m *pour* $m+1$ *valeurs de la variable, représenter cette fonction par une suite ordonnée suivant les dénominateurs des réduites de la fraction continue provenant d'une fraction rationnelle dont le dénominateur* $F(x)$ *a pour racines les valeurs attribuées à la variable.*

Lorsqu'on cherche à résoudre ce problème, on est conduit à distinguer deux cas, suivant que le degré du dénominateur de la fraction est supérieur d'une ou de plusieurs unités au degré du numérateur. Dans le premier cas, le problème est possible et déterminé, et nous donnons la formule correspondante. Dans le second cas, les coefficients inconnus dépendent d'un système linéaire surabondant, et la question proposée est impossible. Le meilleur parti à prendre consiste alors à traiter ce système par la méthode des moindres carrés, en supposant aux valeurs données de la fonction une égale précision; on obtient de cette manière une valeur approchée sous la forme d'une fonction entière ordonnée suivant les dénominateurs des réduites définies dans l'énoncé ci-dessus.

L'étude de ce développement conduit à diverses propositions dont voici les plus saillantes : 1° *Parmi les fractions rationnelles considérées, la dérivée logarithmique de* $F(x)$ *jouit de cette propriété que, si l'on ne prend qu'un certain nombre de termes du développement, on obtient pour la fonction une valeur approchée, qui est, de tous les polynômes entiers du même degré, celui qui rend minimum la somme des carrés des erreurs;* 2° *dans le cas particulier où l'on fait croître la variable, par degrés égaux et insensibles, de* -1 *à* $+1$, *on retrouve le développement suivant les fonctions* X_n *de Legendre.*

Au mois de novembre 1882, dans une séance de la Société mathématique, l'illustre géomètre russe, M. Tchebychef, qui s'est le premier occupé de ces questions, m'a fait l'honneur de rappeler ce Mémoire avec éloges, en revendiquant pour moi la formule remarquable

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{X_0X_1} + \frac{1}{2X_1X_2} + \frac{1}{3X_2X_3} + \ldots + \frac{1}{nX_{n-1}X_n} + \ldots.$$

VIII.

Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique relatifs au mouvement d'un point sur une surface.

Journal de Liouville, 2e série, t. III.

Dans ses savantes recherches sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique, M. Bertrand a fait connaître, parmi beaucoup de résultats remarquables, cette belle proposition :

Pour que les équations du mouvement d'un point placé sur une surface aient une intégrale indépendante du temps et commune à plusieurs problèmes, il faut que la surface soit applicable sur une surface de révolution.

Mais les conclusions relatives aux intégrales communes qui dépendent du temps sont loin d'être aussi simples; il semble qu'on doive considérer deux formes d'intégrales imposant à la surface, l'une, la condition d'être applicable sur une surface de révolution, l'autre celle d'avoir, par rapport à une série de lignes géodésiques et à leurs trajectoires orthogonales, un élément linéaire de la forme

$$ds^2 = a\,dm^2 + b\,dn^2,$$

où b est une constante et a une expression compliquée renfermant trois fonctions arbitraires.

Nous montrons dans ce Mémoire qu'on peut encore, dans ce second cas relatif aux intégrales qui dépendent du temps, tout réduire à un théorème unique et simple, dont voici l'énoncé :

Pour que les équations du mouvement d'un point placé sur une surface aient une intégrale dépendante du temps et commune à plusieurs problèmes, il faut que le carré de l'élément linéaire, par rapport à certaines lignes géodésiques et

à leurs trajectoires orthogonales, soit de la forme

$$ds^2 = dr^2 + \frac{d\omega^2}{\varphi(r) - k\omega},$$

où k est une constante.

Les surfaces pour lesquelles ces conditions sont remplies ont un degré de généralité qui n'excède pas celui des surfaces de révolution; le mouvement de la génératrice est réglé par des constantes.

Pour que ce travail présente un ensemble complet, nous avons d'ailleurs repris, dans une première Partie, le cas où l'intégrale commune est indépendante du temps; il n'était pas sans intérêt de retrouver par une autre voie le théorème de M. Bertrand.

IX.

Sur l'interpolation.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, t. XVIII.

Les procédés connus pour déduire la formule d'interpolation de Newton de celle de Lagrange donnent lieu à des calculs dépourvus à la fois de simplicité et d'élégance, tant la formule de Lagrange, sous sa forme habituelle, se prête peu à la transformation demandée.

En cherchant à grouper convenablement les termes, nous avons été conduit à une forme qui non seulement fournit une solution immédiate du problème, mais qui est en général beaucoup plus commode pour la mise en nombres. Nous montrons enfin que cette forme n'est au fond que la traduction analytique d'une règle énoncée géométriquement dans le lemme V du Livre III des *Principes de la Philosophie naturelle*.

X.

Sur l'intégration des équations différentielles linéaires.

Mémoires de l'Académie de Montpellier, Section des Sciences, t. IV.

Cauchy a démontré que $\int_0^x f(x, \alpha)\, d\alpha$ est une intégrale particulière d'une équation linéaire complète d'ordre m, si $f(x, \alpha)$ est une intégrale de l'équation sans second membre, telle que la fonction f et ses $m - 2$ premières

dérivées s'annulent pour $x = \alpha$ et quel que soit α; on sait d'ailleurs former cette fonction f lorsque l'on connaît l'intégrale générale de l'équation sans second membre.

L'objet principal de cette étude est la généralisation de ce théorème de Cauchy et son extension au cas où l'on n'a que n intégrales particulières de l'équation sans second membre. Il suffit de considérer $\int_0^x z_\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha$, z_α étant la valeur que prend, pour $x = \alpha$, une intégrale particulière d'une équation linéaire d'ordre $m - n$. Le théorème ainsi généralisé permet d'ailleurs de retrouver sans peine la plupart des résultats connus; en particulier, il conduit directement à une formule remarquable de M. Joachimstahl qui s'était borné à vérifier sa formule, après l'avoir devinée en quelque sorte à l'inspection des cas simples traités par le procédé de d'Alembert.

Dans la seconde Partie de ce travail, nous donnons les formules complètes relatives au cas où le premier membre est à coefficients constants, en tenant compte du degré de multiplicité des racines de l'équation caractéristique. Cauchy avait donné sans doute l'équivalent de ces dernières formules à l'aide du calcul des résidus; mais nos démonstrations sont beaucoup plus simples et plus naturelles.

XI.

Sur le calcul inverse des intégrales définies.

Comptes rendus, t. LI.

En Mécanique, en Physique, en Géométrie, en un mot dans les diverses branches des Mathématiques pures ou appliquées, on rencontre la question suivante :

Déterminer une fonction inconnue par la condition qu'une certaine intégrale définie, contenant cette fonction sous le signe $\int$, *acquière une valeur algébrique donnée.*

Malgré les précieux travaux d'Abel, de Murphy, de Liouville, la branche d'Analyse qui a pour objet le problème précédent, et qu'on peut appeler *Calcul inverse des intégrales définies,* n'est encore pour ainsi dire qu'à l'état d'ébauche. C'est à ce *calcul* que se rapporte notre travail; il est divisé en deux Parties.

Dans la première, nous nous sommes appliqué à retrouver par une mé-

thode nouvelle des résultats connus. C'est ainsi que nous résolvons, indépendamment de la considération des différentielles à indices fractionnaires, les diverses questions que Liouville a traitées dans son beau Mémoire inséré au XXI[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique;* ces problèmes sont relatifs à la Géométrie, à l'attraction, au tautochronisme, à l'électromagnétisme et à l'électrodynamique. Nous en avons généralisé deux; ce sont : la question relative à l'action mutuelle de deux éléments de courant, dans laquelle nous avons laissé les deux fonctions inconnues sans rien préjuger sur leur forme ni sur leur relation mutuelle, et la question relative au tautochronisme, dans laquelle nous avons introduit un milieu résistant, à l'exemple d'Abel dont nous avons, par notre méthode, retrouvé tous les résultats.

La seconde Partie est consacrée à la généralisation des formules qui précèdent. Délaissant alors les questions particulières, nous poursuivons surtout la recherche de formules très générales, pouvant se prêter à des applications variées. Nous sommes ainsi parvenu à former un groupe de théorèmes déduits par une voie uniforme de quelques principes simples et constituant en quelque sorte, par leur ensemble, une de ces théories dont la réunion devra former un jour le *Calcul inverse des intégrales définies.*

XII.

Sur la série de Lagrange.

Recueil des Savants étrangers, t. XVIII, et Journal de l'École Polytechnique, XXXIX[e] Cahier.

C'est dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin,* en 1768, que Lagrange a fait connaître pour la première fois l'expression, sous forme de série ordonnée suivant les puissances de α, d'une racine u ou d'une fonction d'une racine de l'équation

$$u = x + \alpha\varphi(u).$$

La démonstration de cette formule, qui a successivement fixé l'attention de Laplace, Jacobi, Cauchy, Tchebychef, etc., est un problème complexe. Il faut, en effet, distinguer d'abord la racine que l'on développe, indiquer les conditions sous lesquelles elle est développable en série convergente, trouver la forme du développement, ainsi qu'une limite supérieure de l'erreur commise lorsqu'on prend un nombre limité de termes dans la série. Il convient enfin que tous ces résultats soient déduits d'un même principe par un procédé à la fois simple et rigoureux.

Telles sont les conditions que nous avons cherché à réaliser dans cette étude qui, indépendamment de son objet principal, renferme des applications à l'équation trinôme, au développement de l'anomalie et du rayon vecteur d'une planète, ainsi qu'à la démonstration d'une formule célèbre de Waring.

Ce Mémoire a été, à l'Académie des Sciences, l'objet d'un Rapport favorable de M. Bertrand, dont nous reproduisons ici les conclusions :

Les géomètres qui liront le travail de M. Rouché lui sauront gré de ses efforts et le féliciteront de son succès. L'Académie sait avec quelle activité le grand géomètre qu'elle a perdu (Cauchy) prenait tour à tour les questions les plus diverses pour objet de ses méditations. Bien souvent il abordait un sujet difficile par des voies entièrement nouvelles, s'avançait jusqu'au moment où il croyait apercevoir le principe d'une solution complète et se hâtait alors de reprendre d'autres études, sans donner une forme définitive aux conséquences et aux preuves de ses découvertes. Il en résulte que l'étude de ses Mémoires, souvent difficile pour un lecteur moins instruit, est éminemment propre à développer l'esprit d'invention chez un géomètre assez habile pour suivre l'illustre auteur dans les voies inconnues qu'il a ouvertes et assez persévérant pour y récolter la moisson abondante et cachée qu'il y laissait bien souvent. M. Rouché vient, après d'autres disciples plus directement formés par l'illustre maître, nous en apporter une preuve nouvelle. L'Académie sera heureuse de l'encourager dans cette voie, et nous n'hésiterons pas à proposer l'insertion de son Mémoire dans le *Recueil des Savants étrangers*.

Ce Mémoire a été, en outre, jugé digne d'être reproduit, quant à sa partie essentielle, dans trois Ouvrages qui font le plus grand honneur à la Science française, le *Traité de Calcul différentiel et intégral* de M. Bertrand, le *Traité d'Algèbre supérieure* de M. Serret et le *Cours de Calcul intégral* professé à la Sorbonne par M. Hermite.

La formule de Lagrange, dit M. Serret, a fait l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres. Mais, dans ces derniers temps, M. Rouché a fait une étude nouvelle et plus complète de la question; sa démonstration ne laisse rien à désirer sous le double rapport de la rigueur et de la simplicité. Nous croyons utile d'exposer ici l'analyse de M. Rouché.

On trouve, dit M. Hermite, dans les travaux de Cauchy d'autres modes de spécification; mais il en résulte de nombreuses difficultés. La méthode que nous avons employée est exempte de ces difficultés; elle est empruntée à un excellent Mémoire de M. Rouché:

XIII.

Démonstration de la formule de Taylor donnant les diverses formes du reste.

Insérée dans le *Traité de Calcul différentiel et intégral* de M. Bertrand, dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite et dans les *Traités d'Algèbre* les plus récents (Briot, G. de Longchamps, etc.).

XIV.

Sur la convergence des séries.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. V.

Si le rapport d'un terme au précédent a pour expression

$$\frac{n-p-x}{n-p-1},$$

p étant un nombre fixe entier et positif, la série est convergente lorsque x est positif, et divergente lorsque x est nul ou négatif.

On déduit de là très aisément le théorème de Gauss : *Si le rapport d'un terme au précédent a pour expression*

$$\frac{n^\lambda + an^{\lambda-1}+\ldots}{n^\lambda + A n^{\lambda-1}+\ldots},$$

il faut et il suffit, pour que la série soit convergente, que la différence $A - a$ *soit plus grande que l'unité.*

XV.

Sur la discussion des équations du premier degré.

Comptes rendus, t. LXXXI.

Cette Note a été refondue plus tard, et les résultats se retrouvent, comme cas particulier, dans le Mémoire n° XIX.

XVI.

Sur l'identité de deux polynômes.

Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales, t. I.

XVII.

Sur les nombres incommensurables.

Traité de Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse; Algèbre de M. G. de Longchamps; etc.

Quand on définit le nombre qui mesure une grandeur A incommensurable avec l'unité comme étant la limite vers laquelle tendent les valeurs approchées de A, à moins de $\frac{1}{n}$ lorsque n croît indéfiniment, il faut, pour justifier la définition, montrer que cette limite existe et est unique, c'est-à-dire indépendante de la loi suivant laquelle on fait croître n indéfiniment.

La démonstration que l'on donnait dans la plupart des Traités était inexacte; on admettait, en effet, que la valeur approchée a_n de A, par défaut à moins de $\frac{1}{n}$, allait toujours en croissant avec n; or nous avons fait remarquer, dans nos examens d'admission à l'École Polytechnique, que cette assertion était fausse; car, si A représente la diagonale du carré dont le côté est égal à l'unité, on a

$$a_{10} = \frac{14}{10} \quad \text{et} \quad a_{11} = \frac{15}{11}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a_{11} < a_{10}.$$

La théorie exposée ici est fondée sur l'introduction d'une quantité α_n que nous nommons *valeur principale* de A, par défaut à moins de $\frac{1}{n}$, et qui est la plus grande des valeurs de a_ν pour toutes les valeurs de ν non supérieures à n, valeur principale qui croît ou du moins ne décroît jamais quand n augmente.

XVIII.

Sur l'élimination.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. XVI.

Ce travail a pour but la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux équations algébriques aient un nombre assigné de racines communes; nous y donnons en outre les expressions de l'équation aux racines communes et des équations qui ont pour racines les autres racines des

deux équations proposées; nous indiquons enfin un procédé pratique très aisé pour former l'éliminant de Cauchy.

Cette question a été reprise dans ces derniers temps par plusieurs géomètres français et étrangers, parmi lesquels nous citerons MM. Lemonnier, Darboux, Falke, Mansion. Mais M. Mansion, professeur à l'Université de Gand, qui est revenu plusieurs fois sur ce sujet et qui a résumé toutes ces études, a bien voulu reconnaître, dans son dernier travail critique (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1879), que j'avais le premier énoncé les conditions d'une manière exacte et complète.

XIX.

Sur les équations algébriques linéaires.

Journal de l'École Polytechnique, XLVIe Cahier.

L'étude complète d'un système de n équations linéaires à m inconnues n'avait pas encore reçu, avant ce travail, la forme simple et précise dont elle est susceptible; le nombre des cas que l'on distinguait et la diversité apparente des conclusions relatives à chacun d'eux laissaient dans l'esprit une confusion regrettable. Nous sommes parvenu à tout réduire à un seul théorème qui, vu sa simplicité extrême et son entière généralité, a eu la bonne fortune de devenir classique; enseigné aujourd'hui dans tous les Cours de Mathématiques spéciales, il figure, sous notre nom, dans les Traités d'Algèbre les plus récents (*voir* les *Traités* de MM. Vacquant, Laurent, G. de Longchamps, Niewenglowski, etc.).

Du tableau rectangulaire formé avec les coefficients des inconnues dans le système de n équations linéaires à m inconnues, on peut toujours déduire, en prenant un nombre égal de lignes et de colonnes, un déterminant qui ne soit pas nul et tel que tous ceux d'ordre supérieur au sien, déduits du tableau considéré, soient nuls. Nous donnons à ce déterminant le nom de *principal* et nous nommons *déterminants caractéristiques* du système les déterminants que l'on obtient en *bordant* le déterminant principal, à la partie inférieure, par les éléments homologues de l'une des horizontales non employées et, à droite, par les termes tout connus correspondants.

Cela posé, le théorème annoncé est le suivant :

Pour que le système de n équations linéaires à m inconnues soit compatible, il faut et il suffit que ses déterminants caractéristiques soient tous nuls; et, dans

cette hypothèse, le système a une solution unique ou est indéterminé, suivant que l'ordre de ces déterminants caractéristiques surpasse ou non le nombre des inconnues.

Cette proposition est complétée par deux règles dont la première est une généralisation de celle de Cramer : l'une donne l'expression des inconnues lorsque le système a une solution unique, n étant supérieur ou égal à m; l'autre, lorsque le système est indéterminé, fait connaître l'ordre de l'indétermination et donne l'expression des inconnues dites *principales* en fonction linéaire des inconnues qui restent arbitraires.

Nous terminons par l'application au cas des équations homogènes, cas où toute incompatibilité disparaît.

XX.

Sur la durée du jeu.

Comptes rendus, t. CVI.

« Pierre et Paul jouent l'un contre l'autre jusqu'à la ruine de l'un d'eux; A et B sont leurs fortunes primitives, a et b leurs mises à chaque partie, p et $q = 1 - \mu$ leurs probabilités respectives de gagner l'une quelconque des parties. Quelle est la valeur probable du nombre des parties? » M. Bertrand est parvenu à ce théorème élégant : « *Si le jeu est équitable, la valeur probable du nombre des parties s'obtient en divisant le produit* AB *des fortunes par le produit ab des mises à chaque partie.* »

Mais qu'arrive-t-il quand le jeu n'est pas équitable et quelle proposition faut-il substituer à celle de M. Bertrand?

L'étude de ce cas nous a conduit au théorème suivant, qui se recommande aussi par sa simplicité, et auquel M. Bertrand a fort gracieusement donné asile dans son *Calcul des probabilités :*

Le nombre probable des parties est égal au rapport de l'avantage total de l'un quelconque des joueurs à l'avantage du même joueur à chaque partie.

Il faut entendre par *avantage* de l'un des joueurs à chaque partie l'excès $(a + b)p - a$ de son espérance mathématique sur sa mise, et, par avantage total du joueur qui a la probabilité P de gagner l'enjeu complet A+B, l'excès $(A + B)P - A$ de son espérance mathématique sur sa fortune.

XXI.

Sur la ruine des joueurs.

Comptes rendus, t. CVI.

« Pierre et Paul jouent l'un contre l'autre avec des probabilités égales. Ils possèdent chacun n francs avant d'entrer au jeu; à chaque partie le perdant donne 1fr au gagnant, et le jeu ne cesse que lorsque l'un quelconque des joueurs est ruiné. Quelle est la probabilité pour que le jeu se termine précisément à la fin d'une partie de rang assigné? »

La solution est surtout remarquable par l'introduction de la fonction bien connue V_n, que l'on rencontre dans la théorie de la division du cercle en parties égales.

XXII.

Sur le développement de la fonction implicite définie par la relation

$$\sin(x-y) = m \sin(x+y).$$

Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. VIII.

Ce développement, qui est d'un usage fréquent en Astronomie et en Géodésie, est obtenu ordinairement à l'aide des exponentielles imaginaires; on ne donne pas d'ailleurs l'expression du reste qui doit compléter le second membre, lorsqu'on s'arrête à un terme de rang assigné. L'objet de ce travail est de combler cette lacune regrettable, et de parvenir, par un procédé direct et facile, à la formule ainsi complétée.

XXIII.

Sur la formule de Stirling.

Comptes rendus, t. CX.

Démonstration simple de la formule

$$1.2\ldots n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}} \qquad \left(\theta \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}\right),$$

qui joue un grand rôle dans le Calcul des probabilités.

§ II. — GÉOMÉTRIE.

I.

Sur un problème d'application de l'Algèbre à la Géométrie.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, t. X.

Question proposée par M. Ramus, de l'Université de Copenhague, et résolue par l'auteur lorsqu'il était élève de Mathématiques spéciales.

II.

Sur la comparaison des triangles rectilignes et des triangles sphériques.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, t. XV.

Si, avec les éléments A, B, C d'un triangle sphérique rectangle en A, et dont les côtés sont infiniment petits par rapport au rayon de la sphère, on construit un triangle rectiligne, les autres éléments homologues des deux triangles ne diffèrent que de quantités du second ordre.

ABC étant un triangle sphérique obliquangle dont les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère, si l'on mène la hauteur AD et si l'on construit sur un plan deux triangles rectangles adjacents A′B′D′, A′C′D′, tels que les côtés A′D′, A′B′, A′C′ et les angles B′A′D′, B′A′C′ soient respectivement égaux aux côtés AD, AB, AC et aux angles BAD, BAC, les éléments homologues du triangle sphérique ABC et du triangle rectiligne A′B′C′ ne différeront que de quantités du second ordre.

III.

Sur l'application des coordonnées polaires à la démonstration simultanée des théorèmes d'Apollonius.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, t. XVII.

Dans la formule $\tang V = \frac{\rho}{\rho'}$, ρ représente la longueur d'un demi-diamètre et V l'angle de ce diamètre et de son conjugué. Si donc, entre cette relation

et l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires, on élimine l'angle ω qui seul distingue le diamètre considéré de son conjugué, on devra tomber sur une relation entre ρ, V, a et b, qui, lorsqu'on y considérera ρ comme inconnue, aura pour racines les longueurs des deux demi-diamètres conjugués. L'élimination, qu'on peut d'ailleurs opérer d'une manière simple et élégante, conduit, en effet, à l'équation

$$\rho^4 - (a^2 + b^2)\rho^2 + \frac{a^2 b^2}{\sin^2\theta} = 0,$$

et il suffit d'écrire les relations entre les coefficients et les racines pour trouver simultanément les deux théorèmes d'Apollonius.

IV.

Sur une propriété des figures homographiques.

Bulletin de la Société philomathique (1865).

Démonstration géométrique de ce théorème fondamental : *La courbe enveloppe des droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques peut être placée sur un cône à base circulaire.*

Cette démonstration, communiquée à la Société mathématique un peu après la publication du *Traité des coniques* de M. Chasles, est beaucoup plus simple que celle qui se trouve dans cet Ouvrage.

V.

Sur les lignes asymptotiques d'une surface du quatrième degré.

Comptes rendus, t. LXXXIV.

La surface dont il s'agit est celle de l'arrière-voussure Saint-Antoine.

Que l'on considère une ellipse dont un axe OC est vertical, et un rectangle horizontal dont les côtés opposés MN, PQ ont respectivement pour milieux les extrémités B et B' de l'axe horizontal de l'ellipse; la surface de l'arrière-voussure est engendrée par une ellipse variable dont le plan reste normal à la droite BB' et dont les sommets sont les points où ce plan rencontre l'ellipse BOC et les côtés opposés MQ, NP du rectangle. Elle a pour équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2},$$

quand on prend pour axes de coordonnées les deux axes de l'ellipse et la perpendiculaire menée au plan de cette courbe par son centre.

Les quatre côtés du rectangle appartiennent à la surface, qui se compose d'une nappe fermée et de quatre nappes indéfinies; la première nappe se projette horizontalement à l'intérieur du rectangle, et les autres se projettent sur les parties du plan horizontal qui sont comprises dans les angles formés par les prolongements des côtés de ce quadrilatère.

Enfin (et c'est là un rapprochement intéressant qui, je crois, n'a pas été remarqué), lorsqu'on attribue aux quantités a^2 et b^2 les valeurs

$$\frac{c^2}{\cos^2\theta}, \quad \frac{c^2}{\sin^2\theta},$$

la surface devient le lieu des points dont la somme des distances, à deux droites qui se coupent sous l'angle 2θ, est constante.

Les lignes asymptotiques de la surface (1) s'expriment d'une manière élégante au moyen des fonctions elliptiques.

Les expressions des coordonnées d'un point quelconque de la surface en fonction des variables u et v relatives aux lignes asymptotiques sont

$$x = \pm \frac{a}{2}\left(\frac{\cos\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am} v} + \frac{\cos\operatorname{am} v}{\cos\operatorname{am} u}\right),$$

$$y = \pm \frac{b}{2}\left(\frac{\sin\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} v}{\sin\operatorname{am} v\,\Delta\operatorname{am} u} + \frac{\sin\operatorname{am} v\,\Delta\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} v}\right),$$

$$z = \pm \frac{c}{4}\,\frac{(\cos^2\operatorname{am} u - \cos^2\operatorname{am} v)^2}{\sin\operatorname{am} u\cos\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} u\,\sin\operatorname{am} v\cos\operatorname{am} v\,\Delta\operatorname{am} v}.$$

VI.

Sur un perfectionnement de la méthode des isopérimètres.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. I.

α et ρ étant l'apothème et le rayon d'un polygone régulier quelconque dont le périmètre est égal à 2, et α_1 et ρ_1 étant l'apothème et le rayon du polygone régulier isopérimètre d'un nombre double de côtés, le nombre $\frac{1}{\pi}$ est compris entre

$$\rho_1 - \tfrac{1}{3}(\rho - \rho_1) \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \tfrac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha).$$

La méthode ainsi perfectionnée abrège le travail de plus de moitié.

VII.

Sur une fonction qui reste invariable dans la transformation par rayons vecteurs réciproques; application aux théorèmes de M. Casey sur le cercle qui en touche quatre autres.

Traité de Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse.

Démonstrations géométriques.

VIII.

Sur la surface des ondes.

Traité de Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse.

Démonstration géométrique d'un théorème très remarquable, découvert analytiquement par un géomètre anglais, M. Niven : « Si, par un point quelconque M de la surface de l'onde et par chacun des cercles principaux, on imagine une sphère, le second point commun à ces trois sphères est la projection du centre sur le plan tangent en M à la surface. »

Explication simple, à l'aide de cette proposition, des singularités de la surface; points coniques et cercles de contact.

IX.

Sur l'impossibilité de la quadrature du cercle.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 3ᵉ série, t. II.

Il n'est guère de problème qui ait donné lieu à plus de tentatives que celui de la quadrature du cercle : on entend par là, comme on sait, la construction avec la règle et le compas, c'est-à-dire à l'aide d'un nombre limité de droites et de cercles, du carré équivalent à un cercle donné quelconque. L'insuccès de tant d'efforts avait fait regarder ce problème comme impossible, bien qu'il n'existât, à vrai dire, aucune démonstration rigoureuse de cette impossibilité; on avait seulement prouvé jusqu'ici que le rapport de la circonférence au diamètre est incommensurable (Lambert, 1761), et qu'il en est de même de son carré (Legendre, Note IV de sa *Géométrie;* Hermite, *Journal de Crelle,* 1873).

Dans tout problème susceptible d'être résolu avec la règle et le compas, chaque point de la figure s'obtient par l'intersection de deux droites ou d'une droite et d'un cercle, ou de deux cercles; si l'on imagine qu'on traduise algébriquement les constructions au fur et à mesure, à l'aide des formules de la Géométrie analytique, on aperçoit qu'on n'aura jamais à résoudre que des questions linéaires ou quadratiques, en sorte que l'équation finale pourra, par un nombre suffisant d'élévations au carré successives, être ramenée à une équation de degré pair à coefficients rationnels. On aura donc démontré l'impossibilité de la quadrature du cercle si l'on prouve que *le nombre* π *ne saurait être racine d'une équation de degré quelconque à coefficients rationnels.*

M. Lindemann a annoncé (*Comptes rendus*, t. XCV, et *Mathematische Annalen*, t. XX, 1882) qu'il était parvenu à déduire cette proposition de certaines formules de M. Hermite (*Mémoire sur la fonction exponentielle*, 1874); sa méthode n'est qu'une généralisation, mais fort habile, de celle qu'avait employée l'illustre géomètre pour démontrer que le nombre e, base des logarithmes népériens, jouit de la propriété similaire.

Notre étude est consacrée à l'exposition, simplifiée sur plusieurs points, du célèbre Mémoire de M. Hermite et des recherches si délicates de M. Lindemann; le travail très remarquable de ce dernier géomètre appelle d'autant plus l'attention qu'il ne paraît pas devoir être le dernier mot sur la question, au moins sous le rapport de la simplicité.

X.

Sur la Géométrie non euclidienne.

Inséré à la fin de la 5e édition du *Traité de Géométrie*, de MM. Rouché et de Comberousse.

La théorie des parallèles n'a fait aucun progrès depuis Euclide jusqu'au commencement de notre siècle. Tous les efforts pour démontrer le *postulatum* d'Euclide ou une proposition équivalente étaient restés infructueux, lorsque Lobattcheffsky, en 1829, et Bolyai, en 1832, changeant résolument de voie, conçurent et exécutèrent séparément le projet hardi de supposer que la proposition à démontrer n'était pas vraie et de constituer un nouveau système de Géométrie non contradictoire, en poussant jusqu'à ses dernières limites le développement de leur hypothèse. Gauss, qui, par ses propres méditations, avait obtenu les mêmes résultats dès 1792, sans toutefois avoir rien publié sur ce sujet, assura par son patronage le succès de l'œuvre de

Lobattcheffsky qui, écrivait-il à Schumacher, « avait traité la matière de main de maître ». Depuis lors un grand nombre de géomètres, parmi lesquels il faut surtout citer Riemann et Beltrami, ont considérablement agrandi le champ de ces spéculations qui, on ne saurait le méconnaître, ont jeté une vive lumière sur la véritable origine des vérités géométriques.

Notre travail est consacré à l'exposition des principes fondamentaux de la Géométrie non euclidienne, que nous avons poursuivie jusqu'au développement complet des équations entre les éléments des triangles rectilignes et sphériques.

On voit d'abord par là que la Trigonométrie sphérique est indépendante du *postulatum* d'Euclide, et que les formules de la Trigonométrie plane ordinaire subsistent aussi toujours lorsque les côtés du triangle considéré sont infiniment petits.

Enfin il résulte de ces formules que les relations métriques des figures planes dépendent d'une longueur k, qui ne peut être déterminée *a priori*; mais, si ce paramètre k doit rester indéterminé au point de vue purement *logique et abstrait*, il n'en est plus de même quand on arrive à la pratique : il faut alors le fixer, et il n'est pas d'autre moyen pour cela que de recourir à l'observation. Une seule expérience suffit : elle consiste à mesurer les éléments d'un triangle et à porter leurs valeurs numériques dans l'une des équations d'où l'on tirera la valeur de k. Or tout essai de ce genre conduit à une valeur de k tellement grande qu'elle dépasse tout ce que nous pouvons mesurer. On est donc ramené, dans la pratique, à la Géométrie euclidienne, qui, comme on l'a montré, répond à $k = \infty$.

On peut dire encore, pour rendre la chose peut-être plus sensible, que, d'après les formules établies, la somme des angles d'un triangle diffère d'autant plus de deux droits que les côtés du triangle sont plus grands; si donc il existait dans la nature un écart entre la somme des angles d'un triangle et deux angles droits, c'est dans les plus grands triangles que l'écart se manifesterait le mieux; or on a constaté, par de nombreuses observations astronomiques, que dans les plus grands triangles l'écart n'atteignait jamais $\frac{1}{100}$ de seconde. La Géométrie pratique est donc la Géométrie euclidienne, et *il faut admettre le* postulatum, *mais comme une vérité expérimentale.*

XI.

Intersection de l'hyperboloïde et d'une droite.

Insérée dans plusieurs Traités récents de Géométrie descriptive (Javary, Songaylo, etc.).

La méthode est fondée sur l'emploi d'un paraboloïde auxiliaire ayant trois génératrices de front.

XII.

Intersection de l'hyperboloïde de révolution et d'une droite.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. II.

La méthode de Duleau (*Correspondance de l'École Polytechnique*, t. I, p. 438), aussi bien que la méthode du paraboloïde à trois directrices de front que nous avons donnée le premier dans nos cours, il y a plus de douze ans, et qui fait l'objet du numéro précédent, sont fondées l'une et l'autre sur l'*emploi d'un point déterminé*, ce qui est un défaut, ce point pouvant être placé d'une manière défavorable.

La méthode que nous faisons connaître ici est très simple en théorie, elle est susceptible de s'étendre à une surface de révolution quelconque et elle offre en outre l'avantage, inhérent à toute bonne solution graphique, de laisser une certaine latitude à l'opérateur. Le principe sur lequel elle est fondée est le suivant : « Si deux hyperboloïdes ont leurs cercles de gorge dans un même plan, la projection sur ce plan de l'intersection des deux surfaces est un cercle. »

XIII.

Sur une question de Géométrie analytique proposée pour l'admission à l'École Normale.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. VI.

XIV.

Sur les propriétés géométriques des polygones funiculaires.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. VI.

Les polygones funiculaires jouissent de deux sortes de propriétés, appartenant les unes à la Géométrie, les autres à la Mécanique. On démontre or-

dinairement toutes ces propriétes par des considérations empruntées à la science des forces. On conçoit pourtant combien il scrait désirable de demander la démonstration des propriétés géométriques à la Géométrie seule. Diverses tentatives ont été faites dans ce sens, mais d'une manière fort incomplète, et par des procédés dépourvus de simplicité et d'uniformité.

Nous sommes parvenus à déduire, avec une facilité extrême, les propriétés géométriques fondamentales des polygones funiculaires d'un théorème nouveau, qui mériterait de prendre place dans les *Éléments de Géométrie*, et dont voici l'énoncé :

Deux triangles ABC, A'B'C' *sont tels que les côtés* AB *et* AC *de l'un soient respectivement parallèles aux côtés* A'B' *et* A'C' *de l'autre. Si, par le sommet* A *du premier, on mène la parallèle* AD *à la base* B'C' *du second, et que, par le sommet* A' *du second, on mène la parallèle* A'B' *à la base* BC *du premier, les points* D *et* D' *diviseront les bases* BC *et* B'C' *en parties inversement proportionnelles.*

Cette théorie géométrique se termine par divers tracés intéressants et relatifs à la construction d'un polygone funiculaire astreint à certaines conditions.

§ III. — SUJETS DIVERS.

I.

Sur la théorie des miroirs sphériques.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, t. XIV.

Démonstration géométrique simple de la formule exacte en tenant compte de l'aberration de sphéricité.

II.

Sur la machine pneumatique.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. XIX.

Il s'agit du calcul du décroissement de la pression lorsqu'on tient compte de l'espace nuisible. On simplifie singulièrement ce calcul, en substituant à la considération de la pression celle de l'excès de la pression sur la pression limite. Le rapport de deux excès consécutifs prend précisément la valeur simple qu'offre le rapport de deux pressions consécutives quand on fait abstraction de l'espace nuisible.

III.

Projet de pont à intrados conoïde.

Ce projet, exécuté sur la ligne du chemin de fer du Midi, avait été demandé à l'auteur, à cause de certaines difficultés provenant de l'irrégularité du plan, par son collègue à l'École Centrale, M. Boutillier, ingénieur de la construction à la Compagnie du Midi.

IV.

Articles divers de critique scientifique.

Nous nous bornerons à citer les suivants :

Étude sur la musique des Grecs (*Journal de l'Instruction publique*).

Conférence sur le système du monde et le Calendrier (*Collection Hachette*).

Edmond Laguerre : sa vie et ses travaux (*Journal de l'École Polytechnique*, LVIe Cahier).

La Théorie des chances, à propos du Calcul des probabilités de M. J. Bertrand (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. VII).

§ IV. — OUVRAGES.

I.

Traité d'Algèbre élémentaire.

1 vol. de 285 pages.

II.

Traité de Trigonométrie.

(EN COLLABORATION AVEC M. LACOUR.)

1 vol. de 236 pages.

III.

Traité de Géométrie.

(EN COLLABORATION AVEC M. CH. DE COMBEROUSSE.)

6e édition, 2 vol. de plus de 500 pages chacun.

Ce Traité contient, en dehors de la partie classique, qui est imprimée en caractères ordinaires, une série d'appendices imprimés en petits caractères et consacrés à l'exposition des principaux travaux géométriques entrepris jusqu'à notre époque, et en particulier des recherches de Chasles et de Poncelet. On y trouve successivement un résumé de l'histoire de la Géométrie, une étude sur les méthodes pour la résolution des problèmes, la théorie des polygones égaux et de même sens et des polygones égaux et de sens contraires, le déplacement d'une figure dans son plan, les transversales, le quadrilatère complet, le rapport anharmonique, la méthode des polaires réciproques, les axes radicaux, les figures inverses ou transformées par rayons vecteurs réciproques, le cercle des neuf points et la géométrie récente du triangle, la transformation par semi-droites réciproques due à Laguerre et les propriétés des cycles, les travaux de Steiner sur les figures maxima, les méthodes de quadrature, le quadrilatère gauche, les propriétés de la projection centrale, les figures homologiques, les travaux d'Euler et de Cauchy sur les polyèdres convexes, ceux de Poinsot, de Cauchy et de

M. Bertrand sur les polyèdres réguliers étoilés, les centres de distances proportionnelles, le théorème de Guldin, les cercles tangents ou isogonaux sur la sphère, la sphère tangente à quatre plans ou à quatre sphères, le théorème de Dandelin, l'homographie, l'involution, une théorie géométrique complète des courbes et des surfaces du second ordre, l'étude de quelques surfaces d'ordre supérieur (surfaces apsidales, surface des ondes, tore); enfin l'Ouvrage se termine par des Notes étendues sur la mesure des grandeurs, sur l'impossibilité de la quadrature du cercle, sur l'emploi des déterminants en Géométrie et sur la Géométrie non euclidienne. Indépendamment de leur travail de coordination et d'analyse, les auteurs peuvent revendiquer l'un et l'autre un grand nombre de démonstrations, qu'il est impossible d'énumérer.

Qu'on nous permette de signaler le succès de cet Ouvrage, qui nous a valu des témoignages bien flatteurs et dont on est allé jusqu'à dire qu'il avait acquis « une réputation universelle ».

IV.

Éléments de Géométrie.

(EN COLLABORATION AVEC M. CH. DE COMBEROUSSE.)

3e édition, 1 vol. de 540 pages.

Abrégé du Traité précédent, à l'usage des classes de Mathématiques élémentaires.

V.

Notes et Additions à la 3e édition du « Traité de Géométrie descriptive » d'Olivier.

Entrepris en 1870, sur la demande de Mme veuve Olivier et de M. l'éditeur Dunod, ce travail se compose de onze Notes placées à la fin du Volume et entièrement distinctes du texte primitif, que nous avons cru devoir scrupuleusement respecter. Voici l'objet de chacune de ces Notes :

1. Sur la plus courte distance de deux droites.
2. Sur les sphères tangentes à quatre plans.
3. Sur les ombres dans les polyèdres (8 épures).
4. Sur la Géométrie infinitésimale. Ordre et valeur principale des éléments fondamentaux de la théorie des courbes planes ou gauches.

5. Sur un cas singulier de la construction des tangentes aux projections des courbes et en particulier sur l'épure de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.

6. Sur quelques cas de l'intersection de deux surfaces du second degré.

7. Sur l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes ne sont pas situés dans un même plan. Ombres du système.

8. Sur ce problème : Construire une droite qui coupe deux droites données sous des angles respectivement donnés.

9. Sur le plan tangent aux surfaces gauches : Rapport anharmonique de quatre plans tangents; théorème de l'obliquité; paraboloïde des normales.

10. Sur les courbes d'ombre de l'hélicoïde de la vis à filets triangulaires et de l'hélicoïde de la vis à filets carrés. — On trouve ici l'indication et la propriété fondamentale d'un *nouveau mode de transformatiou des figures* dont l'étude a été développée depuis par certains auteurs et qualifiée de *transformation réciproque*.

11. Courbure des surfaces et discussion des courbes d'ombre dans les surfaces à courbures opposées. Nous signalerons une *démonstration géométrique* donnant à la fois le *théorème d'Euler* relatif à la courbure des sections normales et le *théorème de Dupin* sur les tangentes conjuguées.

VI.

Traité élémentaire de Géométrie descriptive.

2 petits vol. (texte et planches).

Ce Traité, écrit pour l'enseignement secondaire spécial, est surtout un livre pratique; les tracés fondamentaux y sont discutés avec un soin tout particulier; on y trouve des notions simples sur les ombres, sur la perspective cavalière, sur la coupe des pierres et la charpente.

VII.

Éléments de Statique graphique.

1 vol. de 284 pages.

« Il n'y a guère que quinze ans que les méthodes de Statique graphique ont commencé à s'introduire en France dans la pratique courante des bureaux d'ingénieurs; mais elles s'y sont rapidement développées en raison des incontestables services qu'elles y rendent. Elles sont aujourd'hui tout à fait en honneur. Cet heureux résultat est dû, pour une bonne part, à l'en-

seignement de M. Maurice Lévy au Collège de France et de M. Rouché au Conservatoire des Arts et Métiers. C'est, d'ailleurs, l'apparition en 1874 du Traité de M. Lévy qui a marqué en France le véritable essor des méthodes nouvelles. Depuis lors, le savant ingénieur a fait paraître une seconde édition de son Ouvrage auquel il a donné les proportions d'un Traité complet du calcul des constructions. C'est aujourd'hui le tour de M. Rouché de réunir en un volume la matière de son enseignement, volume que M. Lechalas a eu la bonne fortune de pouvoir faire figurer dans son *Encyclopédie des travaux publics;* et, en réalité, ce Livre y est bien à sa place, car il est fait assurément, par sa clarté, par sa simplicité, par son heureuse ordonnance, pour gagner les suffrages de tout le public des ingénieurs. La Statique graphique, réduite à ses éléments, attendait encore sa forme vraiment classique; c'est celle-ci que M. Rouché vient de lui donner. »

(Extrait de la *Revue des questions scientifiques,* 1889.)

16166 Paris. — Impr. Gauthier-Villars et Fils, quai des Grands-Augustins, 55.